УДК 537.8

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В.В. Сидоренков

МГТУ им. Н.Э. Баумана

На основе первичных фундаментальных соотношений электромагнетизма - закона Кулона взаимодействия неподвижных электрических точечных зарядов и закона сохранения электрического заряда цепочкой последовательных физико-математических рассуждений построена система дифференциальных уравнений Максвелла классической электродинамики.

В курсе общей физики при изложении природы электричества [1] концепция электромагнитного поля является центральной, поскольку посредством такого поля реализуется один из видов фундаментального взаимодействия разнесенных в пространстве материальных тел. Физические свойства указанного поля математически представляются системой функционально связанных между собой уравнений в частных производных первого порядка, первоначальная версия которых была получена во второй половине XIX века Дж.К. Максвеллом [2] обобщением эмпирических фактов. В структуре этих уравнений, описывающих поведение электромагнитного поля в неподвижной среде, заложена основная аксиома классической электродинамики - неразрывное единство переменных во времени электрического и магнитного полей. В современной форме такая система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\text{(a)}\quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \text{(b)}\quad \mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho,$$

$$\text{(c)}\quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \qquad \text{(d)}\quad \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0. \qquad (1)$$

Здесь векторные поля: электрической $\boldsymbol{E}$ и магнитной $\boldsymbol{H}$ напряженности, соответственно, электрической $\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ и магнитной $\boldsymbol{B} = \mu\mu_0\boldsymbol{H}$ индукции, а также плотности электрического тока $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$; $\varepsilon\varepsilon_0$ и $\mu\mu_0$ - абсолютные электрическая и магнитная проницаемости, σ - удельная электрическая проводимость материальной среды, ρ - объемная плотность стороннего электрического заряда.

Покажем, что, несмотря на серьезную методическую модернизацию исходных максвелловских уравнений Герцем, Хевисайдом и Эйнштеном и грандиозные успехи внедрения достижений электромагнетизма во многих областях жизни современного человеческого общества, общепринятая на сегодня теория электромагнитного поля и поныне базируется только лишь на представлениях 19 века о физических свойствах электрического заряда материальных тел. Для аргументированной иллюстрации данного факта здесь нам вполне достаточно двух первичных фундаментальных соотношений электромагнетизма - *закона Кулона силы взаимодействия неподвижных точечных электрических зарядов*

$$\boldsymbol{F}_{Кул} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} \tag{2}$$

и *закона сохранения электрического заряда* [1]

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

цепочкой последовательных физико-математических рассуждений можно построить систему электродинамических уравнений Максвелла (1). Представляется, что логика таких рассуждений позволит обучаемым яснее и глубже понять сущность корпускулярно-полевого дуализма природы электричества.

Фундаментальность закона Кулона (2) состоит в том, что его посредством описывается силовое взаимодействие разнесенных в пространстве неподвижных электрически заряженных материальных тел, где для изучения следствий такого взаимодействия вводят понятие электрического поля в виде *напряженности – силы Кулона на единицу заряда*: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}_{Кул}/q_0$, где q_0 - пробный точечный заряд. Топология структуры электрического поля точечного заряда $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \sim 1/r^2$ такова, что интеграл от этой функции по сфере любого радиуса константен: $(1/r^2)\cdot 4\pi\ r^2 = 4\pi$, а при использовании понятия телесного угла несложно убедиться: *поток вектора поля электрической индукции* (*смещения*) $\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ *через произвольную замкнутую поверхность S тождественно равен суммарному стороннему электрическому заряду* $q_{стор}$ *в объеме* V_S *внутри этой поверхности, причем на самой указанной поверхности посредством ин-*

тегрирования поля электрической индукции $\boldsymbol{D}$ *определяется индуцируемый поляризационный электрический заряд* $q_{поляр}$*, так что* $q_{поляр} = q_{стор}$:

$$\Phi^e = \oint_S \boldsymbol{D}d\boldsymbol{S} = \oint_S \sigma_{поляр}dS = q_{поляр} = \int_{V_S} \rho dV = q_{стор} .$$

Эти рассуждения описывают результат электрической поляризации, а *электростатической теоремой Гаусса* их называют по той причине, что она тождественно устанавливает: $\Phi^e = q_{поляр} = q_{стор}$. Правда, обычно в физические подробности процесса поляризации не вникают, а потому о поляризационном заряде $q_{поляр}$ просто не говорят. Здесь первые два интеграла это *определение вектора* $\boldsymbol{D}$ *- численно равного поверхностной плотности поляризационного заряда* $\sigma_{поляр}$ *на пробной площадке, ориентация которой такова, что* $\sigma_{поляр}$ *на ней максимальна, при этом нормаль* $\vec{n}$ *к поверхности площадки коллинеарна вектору* $\boldsymbol{D}$. Определение $\boldsymbol{D}$ как потокового вектора показывает его принципиальное отличие от линейного (циркуляционного) вектора напряженности $\boldsymbol{E}$, являющегося силовой характеристикой электрического поля. Физически, поле потокового вектора $\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ электрического смещения (индукции) есть отклик среды на воздействие силового вектора $\boldsymbol{E}$ электрической напряженности.

Надо иметь в виду, что равенство нулю суммарных величин указанных зарядов, соответственно, электрического потока: $q_{поляр} = q_{стор} \equiv \Phi^e = 0$, вовсе не означает отсутствие электрического поля в этой области пространства, поскольку электрические заряды бывают положительными и отрицательными, и указанное поле может создаваться электронейтральными источниками, например, электрическими диполями. Это свойство электростатического поля качественно отличает его от ньютоновского поля тяготения, где источники такого поля – гравитирующие массы имеют один знак. В системе электродинамических дифференциальных уравнений (1) теорема Гаусса представлена (см. теорему Гаусса-Остроградского) соотношением (1b), описывающим результат электрической поляризации среды, где в случае электронейтральности ($\rho = 0$) среды оно имеет вид $\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 0$.

Воспользуемся теперь другим первичным фундаментальным законом электромагнетизма - *законом сохранения электрического заряда* (3), структурно представляющим собой уравнение непрерывности. Закон гласит: *изменение за-*

ряда в данной точке пространства $\partial\rho/\partial t$ *единственно возможно лишь за счет транспорта зарядов извне* $\operatorname{div}\boldsymbol{j}$, ведь по определению (теорема Гаусса-Остроградского) дивергенция - это объемная плотность потока векторного поля в данной точке. Тогда подстановка в (3) уравнения (1b) дает формулу $\operatorname{div}(\boldsymbol{j}+\partial\boldsymbol{D}/\partial t)=0$. И с учетом того, что для любого векторного поля $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0$, получаем еще одно уравнение обсуждаемой здесь системы: $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ (1c). Это уравнение обычно называют законом полного тока: *электрические токи проводимости и смещения порождают вихревое магнитное поле, силовые линии векторов напряженности* $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ *которого охватывают линии этих токов.*

Итак, в области существования движущихся зарядов и переменных во времени электрических полей $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\neq 0$, то есть в уравнении (1c) функция $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ является чисто вихревой, а потому для математического уточнения данной топологии магнитного поля введем соотношение $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$. Тем самым получим следующее уравнение системы (1) – уравнение (1d). Поскольку дивергенция - объемная плотность потока векторного поля в данной точке, то уравнение $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$ способно описать не только вихревые свойства функции $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$, но и ее потенциальную версию, случай когда $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=0$. В этой ситуации соотношение (1d) математически представляет физический результат магнитной поляризации материальной среды. Комментируя физическое содержание такого уравнения, обычно говорят, что оно наглядно иллюстрирует отсутствие в Природе сторонних магнитных зарядов, подобных зарядам электрическим, при этом, входя в противоречие, безосновательно называют $\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$ *теоремой Гаусса магнитного поля*, хотя в рамках логики уравнений Максвелла базы для этой теоремы - *магнитного закона Кулона* принципиально не существует.

Наконец, частным дифференцированием по времени $\partial/\partial t$ уравнения (1d) получаем на основе $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0$ адекватное с учетом знака *закону электромагнитной индукции Фарадея* уравнение (1a), последнее в системе (1). Итак, *изменяющееся во времени поле магнитной индукции порождает в данной точке пространства вихревое электрическое поле*. Ввиду того, что в уравнении (1a) $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}\neq 0$, то функция поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ является вихревой, и эту топологию способно уточнить, согласно вышесказанному о дивергенции, уже полученное нами ранее уравнение (1b) в виде $\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 0$. Как видим, <u>дивергентные уравнения (1b) и (1d) как математически, так и физически весьма содержательны</u>. Как видим, <u>дивергентные уравнения</u> (1б) и (1г) <u>как математически, так и физически весьма содержательны</u>. Итак, теперь, казалось бы, вопрос исчерпан.

И это только то, что лежит на поверхности. А если взглянуть глубже, то уравнения $\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 0$ и $\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$ содержат сведения о полях электрического $\boldsymbol{A}^e$ и магнитного $\boldsymbol{A}^m$ векторных потенциалов, связанных с электрической - $\boldsymbol{D} = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}^e$ и магнитной - $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}^m$ поляризациями. На сегодня установлено [3, 4], что векторные потенциалы – полноправные физически значимые поля, и учет этого обстоятельства позволяет углубить и кардинально модернизировать концептуальные основы классической электродинамики, где обсуждаемая здесь система уравнений Максвелла будет лишь рядовым частным следствием.

Однако вернемся к уравнениям системы (1). Убедимся, что данная система замкнута и может быть представлена в виде математической задачи Коши - решение уравнений с заданными начальными условиями. Для этого, прежде всего, надо показать, что уравнение (1d) является следствием уравнения (1a), а уравнение (1b) есть следствие уравнения (1c). Вообще говоря, все это уже установлено в наших рассуждениях при построении уравнений системы (1), и все же проделаем обратное в явном виде. Итак, возьмем дивергенцию от (1a):

$$\mathrm{divrot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\boldsymbol{B} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\boldsymbol{B} = const \neq f(t).$$

Поскольку уравнение (1d) $\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$ удовлетворяется при любых t , то оно верно и для $t = 0$. Таким образом, уравнение (1d) действительно является начальным условием для уравнения (1a). Аналогичная процедура с уравнением (1c) и сравнение этого результата с уравнением непрерывности (3) дает цепочку:

$$\mathrm{divrot}\boldsymbol{H} = \mathrm{div}\ \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\boldsymbol{D} - \rho) = 0 \Rightarrow (\mathrm{div}\boldsymbol{D} - \rho) = const \neq f(t).$$

А так как уравнение (1b) $\mathrm{div}\boldsymbol{D} - \rho = 0$ справедливо при любых t , то оно верно и для $t = 0$. Следовательно, уравнение (1b) - это начальное условие для уравнения (1c).

В итоге с учетом уравнения непрерывности (3) <u>*система* (1) *действительно замкнута*</u> – <u>16 скалярных уравнений</u>: (1a), (1c), (3) - 7 и материальные соотношения - 9 для нахождения 16 скалярных функций: компонент векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{j}$ и плотности заряда ρ.

Важнейшим фундаментальным следствием уравнений Максвелла является тот факт, что $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ компоненты электромагнитного поля распространяются в пространстве в виде волн. Например, из (1а) и (1с) сравнительно просто получить волновое уравнение для поля электрической напряженности $\boldsymbol{E}$:

$$\mathrm{rot\,rot}\,\boldsymbol{E} = \mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{E} - \Delta\boldsymbol{E} = -\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = -\sigma\mu\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Аналогично получается и уравнение волн поля магнитной напряженности $\boldsymbol{H}$, структурно полностью тождественное уравнению (4). Видно, что скорость распространения этих волн определяется только лишь электрическими и магнитными параметрами пространства материальной среды: ε, μ и σ, в частности, в отсутствие поглощения ($\sigma = 0$) скорость волн $\mathrm{v} = 1/\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$.

С целью ответа на вопрос, что переносят эти волны, воспользуемся уравнениями Максвелла (1), являющиеся, в сущности, первичными уравнениями электромагнитной волны, откуда на основе уравнений (1а) и (1с) получаем *закон сохранения энергии* в форме, так называемой теоремы Пойнтинга:

$$\boldsymbol{H}\mathrm{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \mathrm{div}[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}] = -(\boldsymbol{j},\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} - \boldsymbol{H}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}. \quad (5)$$

Видно, что поступающий извне в данную точку среды поток электромагнитной энергии, определяемый вектором Пойнтинга $[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}]$, идет на компенсацию джоулевых (тепловых) потерь в процессе электропроводности и изменение электрической и магнитной энергий, либо наоборот - эти физические процессы вызывают излучение наружу потока электромагнитной энергии. Например, уравнение энергетического баланса (5) показывает, что излучение вовне потока энергии $\mathrm{div}[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}] > 0$ возникает при джоулевых потерях $(\boldsymbol{j},\boldsymbol{E}) < 0$ за счет работы источника ЭДС, в котором $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{j}$ - антипараллельны. Соответственно, при $\mathrm{div}[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}] > 0$ производные от слагаемых других энергий меньше нуля.

Существенно, что вектор плотности потока электромагнитной энергии $[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}]$, отличен от нуля только там, где одновременно присутствуют электрическая и магнитная компоненты поля, векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ которых неколлинеарны.

Соответственно, как видно из уравнений (1a) и (1c), переносящая энергию электромагнитная волна принципиально состоит из двух векторных взаимно ортогональных $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ компонент. Кстати, совокупное наличие в пространстве $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ полей вызывает отклик материальной среды в виде векторного *поля объемной плотности электромагнитного импульса*: $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = [\boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}]$.

При этом несложно убедиться [1], что уравнения Максвелла (1) описывают электромагнитную волну, колебания $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ компонент которой синфазны между собой. Но такие колебания этих двух компонент в принципе не отвечают механизму переноса энергии посредством волн произвольной физической природы, когда в данной точке пространства происходит взаимное преобразование во времени потенциальной (в нашем случае электрической) энергии в кинетическую (магнитную) энергию, и наоборот.

Упрощенно, ради наглядности этот процесс можно пояснить на примере колебаний физического маятника, когда такой вид движения реализуется при сдвиге фазы колебаний смещения и скорости маятника на $\pi/2$, то есть благодаря обмену кинетической и потенциальной энергиями, где полная энергия незатухающих колебаний неизменна во времени. Следовательно, и в случае волны перенос энергии возможен только при сдвиге фазы колебаний между ее компонентами на $\pi/2$, причем в среде без потерь поток энергии не зависит от времени и точек пространства. Однако, согласно уравнениям Максвелла, электромагнитных волн с такими характеристиками в Природе не существуют.

Правда, традиционная логика обсуждения переноса электромагнитной энергии такова, что проблемы здесь как бы и нет - всем все понятно. Действительно, из решения уравнений (1) для волновых амплитуд $H_m = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 / \mu\mu_0} E_m$ формально, но абсолютно строго следует $\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 / 2 = \mu\mu_0 H_m^2 / 2$ - закон сохранения энергии. В итоге однозначно доказано, что электрическая энергия в точности равна энергии магнитной, переносимых волнами соответствующих компонент электромагнитного поля. Именно так этот вопрос излагается учащимся, причем правомерность такой методики аргументируется тем, что перенос энергии электромагнитными волнами реален, и это физическое явление широко и всесторонне используется во многих областях жизни современного общества. Однако это не ответ на вопрос: как же все-таки эти энергии переносятся?

В качестве конструктивного замечания отметим, что хотя $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ компоненты электромагнитных волн распространяются только совместно и их энергии равны, но при этом связи этих энергий между собой нет (синфазность колебаний). Более того, в случае электро- и магнитостатики эти энергии независимы в принципе. Следовательно, необходимо приходим к выводу об объективности раздельного существования *электрической* и *магнитной энергий*, при отсутствии каких-либо физических оснований считать, что электромагнитная волна распространяется так же, как и все другие волны, посредством взаимной перекачки энергии одного вида в другой. Но тогда становится совершенно неясным, казалось бы, очевидное для каждого понятие *электромагнитной энергии*, а также каков реальный механизм волнового переноса этого вида энергии?

Таким образом, уравнения Максвелла обладают весьма ограниченным диапазоном явных возможностей при описании ряда известных в настоящее время явлений электромагнетизма. В частности, уравнения (1) не могут вскрыть и адекватно описать физическую суть магнитных явлений, поскольку известно [5], что истинный магнетизм – это спиновый магнетизм. Например, они в принципе не способны объяснить *эффект Эйнштейна-де Гааза* [1, 5], когда в материальной среде при ее однородном намагничивании возникает механический момент вращения, направленный коллинеарно подмагничивающему полю магнитной индукции $\boldsymbol{B}$. Так же далеко не ясен вопрос о существовании и физической реализации *момента импульса электромагнитного поля*, соответственно, переносящих его волн.

Здесь как бы существует парадокс, где с одной стороны, теория Максвелла предсказывает равенство нулю момента импульса плоской электромагнитной волны, а, с другой, физически понятно, что электромагнитное излучение – это излучение возбужденными атомами избытка энергии в виде фотонов, которые будут забирать от атома не только часть энергии, но и уносить долю внутреннего углового момента атома. Следовательно, распространяющееся в виде волн электромагнитное поле должно обладать вполне определенной величиной момента импульса, что, кстати, наблюдалось в экспериментах [6, 7].

Таким образом, <u>принципиальный дефект традиционной классической электродинамики в том, что в ее представлениях об электрическом заряде и его поле отсутствует понятие о спине (собственном моменте импульса)</u>. Ссылки на ныне существующую *квантовую электродинамику* [5] неуместны, поскольку это отдельная самостоятельная наука, по сути несвязанная с классической теорией. Правда, известны попытки введения в электродинамику так называемого *классического спина* [8], но и они оказались неконструктивными.

Таким образом, проблема с выяснением физического механизма переноса энергии волнами электромагнитного поля объективно существует, она актуальна и для ее разрешения требуется далеко нестандартный подход. Информация: в настоящее время данная проблема активно, а главное успешно исследуется и находится в окончательной стадии разрешения (например, работы [3]).

Материал этого сообщения может быть полезен студентам при самообразовании, а преподавателям для занятий по курсам общей физики, классической электродинамики и сопутствующим им техническим дисциплинам.

Литература

1. *Матвеев А.Н.* Электродинамика. М.: Высшая школа, 1980.
2. *Максвелл Дж.К.* Трактат об электричестве и магнетизме. Т. I и II. М.: Наука, 1989.
3. *Антонов Л.И., Миронова Г.А., Лукашёва Е.В., Чистякова Н.И.* Векторный магнитный потенциал в курсе общей физики / Препринт № 11. М.: Изд-во Физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, 1998.
4. *Сидоренков В.В.* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2006. № 1. С. 28-37; // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2007. Т. 3. № 11. С. 75-82; // Материалы X Международной конференции «Физика в системе современного образования». - Санкт-Петербург: РГПУ, 2009. Том 1. Секция 1. "Профессиональное физическое образование". С. 114-117; // Необратимые процессы в природе и технике: Сборник научных трудов. Вып. 3. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. С. 56-83; // http://scipeople.ru/publication/67585.
5. Физический энциклопедический словарь. М.: СЭ, 1983.
6. *Вульфсон К.С.* // УФН. 1987. Том 152. Вып. 4. С. 667-674.
7. *Соколов И.В.* // УФН. 1991. Том 161. № 10. С. 175-190.
8. *Храпко Р.И.* // Вестник РУДН. Сер. «Физика». 2002. № 10(1). С. 40-48.